می دانیم که: و

نتیجه می گیریم که: $\Rightarrow P(o,q\mid\lambda)=P(o\mid q,\lambda)P(q\mid\lambda)$

که به دست می آید: $\Rightarrow P(o,q\mid\lambda)=\Pi_{q_1}b_{q_1}(o_1)a_{q_1q_2}b_{q_2}(o_2)\cdots a_{q_{T-1}q_T}b_{q_T}(o_T)$

که فرمول نهایی به صورت زیر می باشد:

$$\Rightarrow P(o\mid\lambda)=\sum_q P(o,q\mid\lambda)=$$
$$\sum_{q_1q_2\cdots q_T}\Pi_{q_1}b_{q_1}(o_1)a_{q_1q_2}b_{q_2}(o_2)\cdots a_{q_{T-1}q_T}b_{q_T}(o_T)$$

مرتبه زمانی الگوریتم بالا $O(2TN^T)$ می باشد. این مقدار بسیار بالا می باشد.

این به این خاصط است که سعی می شود در حین محاسبه همه دنباله حالت ها در نظر گرفته شوند.

در ادامه راه حل هایی برای کاهش مرتبه زمانی ارائه خواهیم کرد.

- راه حل دوم مسئله اول:

نام روش روش Forward است.

این روش نوعی الگوریتم پویاست که در یک متغییر مقادیر میانی ذخیره می شوند برای استفاده آینده.

در این روش متغییری به نام α وجود دارد. $\alpha_t(i)=P(o_1,o_2,\cdots,o_t,q_t=i\mid\lambda)$

مقدار این متغییر احتمال حضور در حالت qt است با دیدن مشاهدات o1,....ot .

کل روند الگوریتم به صورت زیر است:

- مقداردهی اولیه: $\alpha_1(i)=b_i(o_1)\Pi_i,1\le i\le N$ احتمال شروع از هر حالت و تولید مشاهده اول.
- حلقه:

$$\alpha_{t+1}(j)=[\sum_{i=1}^{N}\alpha_t(i)a_{ij}]b_j(o_{t+1})$$
$$1\le t\le T-1,1\le j\le N$$

احتمال حضور در حالت بعدی با توجه به مشاهدات انجام شده به صورت بالا محاسبه می شود.

یعنی فرض کنید می خواهیم α حالت j را محاسبه کنیم (عامل $[\sum_{i=1}^{N}\alpha_t(i)a_{ij}]$)

باید از همه حالت ها بپریم به j و سپس مشاهده مربروطه را تولید کنیم (عامل $b_j(o_{t+1})$)

- پایان: احتمال مورد نظر با استفاده از جمع α های زمان T محاسبه می شود:

$$P(o\mid\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_T(i)$$

مرتبه زمانی این الگوریتم $O(N^2T)$ می باشد.

- راه حل سوم مسئله اول:

این روش شبیه روش Forward می باشد.

با این تفاوت که از عقب به جلو عمل می شود. به همین خاطر نام متغییر Backward است.

در این روش متغییری به نام β داریم: $\beta_t(i) = P(o_{t+1}, o_{t+2}, \cdots, o_T \mid q_t = i, \lambda)$

کل روند الگوریتم به صورت زیر است:

- مقداردهی اولیه: $\beta_T(i) = 1, 1 \le i \le N$
- حلقه:

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$
$$t = T-1, T-2, \cdots, 1 And 1 \le j \le N$$

احتمال حضور در حالت قبلی با توجه به مشاهدات انجام شده به صورت بالا محاسبه می شود.

- پایان: احتمال مورد نظر با استفاده از جمع β های زمان 1 محاسبه می شود:

$$P(o \mid \lambda) = \sum_{i=1}^{N} \beta_1(i)$$

مرتبه زمانی این الگوریتم $O(N^2 T)$ می باشد.

4– مسئله دوم

- تعریف مسئله دوم:

فرض کنید یک مدل λ و یک دنباله مشاهدات O داریم، محتمل ترین دنباله حالات مدل که آن مشاهدات را تولید کرده اند کدام است؟

- راه حل اول مسئله دوم:

هدف یافتن محتمل ترین دنباله حالات می باشد.

فرض کنید یک متغییر γ به صورت روبرو تعریف شود: $\gamma_t(i) = P(q_t = i \mid o, \lambda)$

یعنی احتمال وجود در حالت i در زمان t با دیدن مشاهدات. یعنی در هر زمان احتمال وجود در یک حالت را داریم.

مقدار γ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\gamma_t(i) = P(q_t = i \mid o, \lambda) = \frac{P(o, q_t = i \mid \lambda)}{P(o \mid \lambda)}$$
$$= \frac{P(o, q_t = i \mid \lambda)}{\sum_{i=1}^{N} P(o, q_t = i \mid \lambda)} = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i)\beta_t(i)}$$

که α و β همان متغییرهای Forward و Backward هستند.

محتمل ترین حالت به این صورت به دست می آید: $q_t^* = \arg\max_i [\gamma_t(i)], 1 \le t \le T, 1 \le t = n \le N$

یعنی در هر زمان ماکزیمم گیری می شود که کدام حالت بیشترین احتمال رخداد را دارد.

6 – خلاصه و نتیجه گیری

در این فصل با مدل مخفی مارکوف آشنا شدیم

همچنین با دو مسئله از سه مسئله مهم HMMها آشنا شدیم و نحوه حل آن را فرا گرفتیم

7 – منابع درس

1- Rabiner, “Fundumentals of Speech Recognition”
2- Huang, Acero, “Spoken Language Processing”
3- Deller, “Discrete-time processing of speech signals”